ACERCA DE LA ENSENANZA DE LAS CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA UTILIZANDO LA MODELACION MATEMATICA

CARLOS ENRIQUE FRASSER SANCHEZ
DIRECTOR DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS, CIBERNETICA Y ESTADISTICA DE UNINCCA.

Contenido.

1. Introduccion: "matematizacion de las ciencias y modelacion"

Una particularidad caracteristica de nuestro tiempo esta constituida por la amplia utilizacion de los metodos matematicos en las ciencias naturales. Este proceso, llamado proceso de matematizacion, abarca todas las esferas del conocimiento humano, a las cuales, en general, las matematicas no se aplicaban o se aplicaban solamente a un nivel elemental. Un ejemplo de ello lo constituyen la quimica, la geologia, la geografia, la biologia y otras ciencias. A la par con esto, ocurre un cambio de los metodos verbales y esquematicos de descripcion por los metodos matematicos, en tanto que el razonamiento intuitivo esta en relacion activa y mas estrecha con el deductivo. Actualmente, la exposicion de cualquier tipo de investigacion cientifica conduce a un maximo nivel de formalizacion, en donde se incluyen postulados axiomaticos y todo tipo de inferencias deductivas.

La matematizacion de las ciencias naturales, sociales y tecnicas se relaciona directamente con el vertiginoso desarrollo de la tecnica de computo. En las manos de los investigadores aparecio un potente instrumento (el computador), el cual utilizan para la obtencion de resultados cuantitativos de gran complejidad. Los exitos en la realizacion de toda una serie de complejos calculos en las investigaciones nucleares y del cosmos y en los problemas de la economia nacional y del medio ambiente, llamaron la atencion y el interes de especialistas de las mas amplias esferas de la ciencia y la tecnica. Algunos investigadores suponen que es suficiente tener un sistema de correlaciones que describan la estructura y la dinamica del objeto investigado, preparar el programa de ordenador y por ultimo, que la maquina lleve a cabo el calculo. Sin embargo, como sabemos, la tecnica de computo no se circunscribe solamente en este ambito, sino que ella es aplicada a un sin numero de otras espectaculares posibilidades.

No obstante, las causas mas profundas de matematizacion de las ciencias naturales estan condicionadas al propio proceso de concepcion y formacion del conocimiento cientifico. Este proceso esta directamente relacionado con la acumulacion de material de experimentacion, con su fundamento, con la formulacion de hipotesis, con la realizacion de experimentos y con la creacion de modelos matematicos, los cuales, condicionalmente, se pueden denominar modelos de pronostico. El objetivo de cualquier teoria cientifica es el pronostico. Aqui es necesario agregar que el pronostico cualitativo es la cima de cualquier modelo matematico de pronostico, pues el contiene en si mismo, y por regla general, un comportamiento cuantitativo del objeto investigado.

2. Modelos matematicos.

Se entiende por **modelo matematico** una descripcion bastante aproximada de fenomenos del mundo exterior, expresada en el lenguaje de las matematicas. En las ciencias naturales los modelos matematicos representan, como regla, un sistema de ecuaciones diferenciales obtenidas como resultado de las leyes de conservacion, complementadas con correlaciones empiricas que cierran un sistema, junto con sus condiciones iniciales y de frontera.

3. Modelacion Matematica.

Por **modelacion matematica** se entiende la elaboracion de modelos matematicos, su investigacion con metodos matematicos y la comparacion de los resultados teoricos con los datos experimentales. Utilizaremos la modelacion matematica en la discusion y resolucion de diferentes problemas y formularemos una descripcion heuristica acerca de las etapas de la misma.

4. Modelacion Matematica en el Problema del Fenomeno de Tunguska.

Como ejemplo brillante de utilizacion de los modelos matematicos en la investigacion de los fenomenos de la naturaleza podriamos citar el fenomeno de Tunguska, tambien conocido como el **meteorito de Tunguska (en Siberia)**. Los intentos de explicacion de este fenomeno a un nivel cualitativo en los limites de los paradigmas admitidos no han tenido exito. La acumulacion de material experimental que surgio como necesidad de revisar las diferentes hipotesis en torno a este suceso, permitio apartarse de la mayor parte de ellas y conducirse por un examen de caracteristicas cuantitativas del fenomeno.

El 30 de junio de 1908 alrededor de las siete de la manana y como resultado del ingreso a la atmosfera terrestre de un enorme objeto cosmico, se desencadeno una colosal explosion. De acuerdo con las investigaciones realizadas a lo largo de muchos anos, se establecio que la explosion sucedio a una altura de 7 a 9 km de la superficie terrestre y se estima que el total de energia desprendida es del orden de 4×10^{17} J. Los testimonios demuestran que el objeto se dirigia hacia el polo norte segun un angulo medio con respecto al horizonte de 10 a 15° y las observaciones del vuelo se extendieron por cerca de 10 seg. La explosion estuvo acompanada de toda una serie de efectos (remocion del bosque, incendios, ondas sismicas, gran iluminacion del cielo nocturno, consecuencias biologicas y electromagneticas), los cuales fueron cuidadosamente investigados y catalogados. Sin embargo, la circunstancia mas asombrosa consiste en que, hasta el dia de hoy, no se ha descubierto ni un gramo de sustancia que en forma segura identificara el objeto cosmico. La hipotesis inicial segun la cual el suceso de 1908 es consecuencia del ingreso de un gran meteorito, choca con enormes dificultades. En consecuencia, surgio la hipotesis de un cometa, la cual permite, al menos a un nivel cualitativo, explicar la ausencia de sustancia: en el momento de la explosion la sustancia del cometa compuesta, supuestamente, por gases congelados, se combino con cierta cantidad de sustancia de piedra, haciendola quemar. Se presupone que la densidad de la sustancia de un cometa es insignificante comparada con la de un meteorito y se estima que su magnitud es $\rho \leq 10^3$ kg/m^3. Existen suficientes testimonios para valorar cualitativamente algunos efectos que acompanaron al paso del objeto de Tunguska a traves de la atmosfera, a fin de intentar formular conclusiones acerca de una hipotesis de cometa que sea razonable.

Antes que todo, es necesario valorar la velocidad de ingreso a la atmosfera. Esta caracteristica tiene un significado clave con el cual se determinan muchos otros parametros del fenomeno. El brillo del objeto cosmico producto del calentamiento de su superficie al friccionar con capas densas de la atmosfera, comienza a una altura aproximada de 100 km. Suponiendo que la velocidad es constante, el angulo de la trayectoria con respecto a la superficie terrestre es $\leq 15°$, mientras que $\tau \cong$ 10 seg., obtenemos

$$v = (100\ \text{km} \times \text{sen } 15°)/10\ \text{seg} \cong 40\ \text{km/seg}.$$

En los calculos siguientes utilizaremos este valor de la velocidad. Supongamos que la energia cinetica del objeto excede al doble de la energia de la explosion (?Por que?): $mv^2 = 2W_0$. Al ser $v = 4 \times 10^4$ m/seg, la masa del objeto es $m = 2(4 \times 10^{17}\ \text{J})/(4 \times 10^4\ \text{m/seg})^2 \cong 0{,}5 \times 10^9$ kg.

Una medida caracteristica del objeto es $2a$ que se puede valorar partiendo del supuesto de su esfericidad y su densidad: $a = [m/(4\pi\rho/3)]^{1/3} = [0{,}5 \times 10^9\ \text{kg}/(4\pi \times 10^3/3\ \text{kg/m}^3)]^{1/3} \geq 50$ m.

Al moverse el cuerpo en la atmosfera terrestre, sobre el actuan dos fuerzas: la fuerza de resistencia frontal del medio, dirigida en contra el movimiento:

$$\boldsymbol{F}_1 = -\ (C/2)\ S\rho v\boldsymbol{v}$$

y la fuerza debida a la aceleracion de la gravedad

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}.$$

Aqui, C es una constante, $S = \pi a^2$ es el area de la seccion transversal del objeto, ρ es la densidad de la atmosfera, v es la velocidad del objeto y m es su masa. Ahora bien,

$$\boldsymbol{g} = -\ g_0\ (R/r)^2\ \boldsymbol{e}_r,$$

donde R es el radio de la tierra, $g_0 = 9{,}8$ m/seg^2, $\boldsymbol{e}_r$ es un vector unitario que determina la direccion y sentido del radio-vector que une el centro de la tierra con la posicion en cada instante del objeto.

Puesto que las escalas caracteristicas del problema (~100 km) son mayores que las dimensiones caracteristicas del objeto (~100 m), entonces el cuerpo puede examinarse (modelarse) como un punto material. Asi, la ecuacion del movimiento toma la forma:

$$m(d^2\boldsymbol{r}/dt^2) = -\ g_0 m(R/r)^2\ (\boldsymbol{r}/r) - (C/2)\ S\rho v\boldsymbol{v}, \qquad (1)$$

con condiciones iniciales $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$ para $t = 0$, donde $\boldsymbol{r}_0$ determina la posicion del objeto en el instante de su ingreso en la atmosfera a una altura de 100 km y $\boldsymbol{v}_0$ determina la magnitud y direccion de la velocidad de ingreso. La magnitud del coeficiente C depende de la velocidad. No obstante, considerando que el objeto se mueve a velocidad hipersonica, este coeficiente no cambia significativamente y se puede demostrar que para la esfera C $\cong$ 1 (?Como?).

La ecuacion diferencial (1) se puede integrar (intente integrarla) y obtener la ley de cambio de la energia mecanica completa del objeto investigado

$$E_2 - E_1 = A_{12}^d\ , \qquad (2)$$

donde $E = K + U$ es la energia mecanica completa que es igual a la suma de las energias cinetica y potencial, tomadas en los puntos *1* y *2* de la trayectoria y A_{12}^d es el trabajo de la fuerza de resistencia frontal a lo largo de la trayectoria entre estos dos puntos

$$A_{12}^{d} = -(S/2)\int_{l_{12}} r\, v(\boldsymbol{v}\bullet d\boldsymbol{r})\,.$$

La ecuacion (2) se puede escribir mas comodamente para su analisis, en la forma

$$K_2 = K_1 - (U_2 - U_1) + A_{12}^{d}\,. \qquad (3)$$

Designemos por *1* el punto de ingreso del objeto a la atmosfera y por *2* su punto de caida. Compararemos los valores de los tres sumandos en el miembro derecho de la ecuacion (3). Considerando que $K_1 \cong 4 \times 10^{17}$ J, obtenemos

$$U_2 - U_1 \cong mgh = 5 \times 10^{14} \text{ J}.$$

$$\left|A_{12}^{d}\right| \leq (S/2)(v_0^{2}/\text{sen}\,\alpha_0)\int_0^h r\,(z)\,dz$$

En la valoracion, el elemento de trayectoria esta expresado a traves del elemento del eje de coordenadas z, calculado desde la superficie de la tierra hacia arriba. Aproximando la ley de cambio de la densidad barometrica mediante $\rho = \rho_0\exp(-z/H)$, donde H es la altura anteriormente citada de 9 km y ρ_0 es la densidad de la atmosfera a nivel de la superficie terrestre ($\rho_0 \cong 1{,}3$ kg/m^3), mientras que $\alpha_0 \cong 15°$, obtenemos

$$(S/2)(v_0^{2}/\text{sen}\,\alpha_0)\int_0^h r\,(z)\,dz = [\pi(50)^2/2].[(4 \times 10^4)^2/\text{sen } 15°].[9000 \times 1.3].[1 - \exp(-100/9)],$$

esto es,

$$\left|A_{12}^{d}\right| \leq 3 \times 10^{17} \text{ J}.$$

Por consiguiente, la cota superior de energia perdida por el cuerpo al pasar a traves de la atmosfera es menor que 3 x 10^{17} J. La energia cinetica restante K_2 ($\geq 10^{17}$ J.) muestra que la velocidad del objeto al encontrarse con la superficie terrestre no es menor de 20 km/seg y a la altura de 10 km practicamente no se diferencia de la inicial.

Las valoraciones obtenidas permiten simplificar en forma esencial el modelo inicial, a tiempo que se conserva una alta exactitud de los resultados. Semejantes simplificaciones tienen que ver con la trayectoria del movimiento, a tiempo que el calculo de A_{12}^{d} se puede considerar directo con angulo de inclinacion igual al inicial. En la expresion para la fuerza gravitacional se puede despreciar el cambio de r, puesto que $r = R[1+(z/R)]$, donde $z/R \leq 0{,}02$.

Asi, el modelo matematico puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned} dv_y/dt &= -(S\rho/2m)(v_y)(v_y^2 + v_z^2)^{1/2},\\ dv_z/dt &= -g_0 - (S\rho/2m)(v_z)(v_y^2 + v_z^2)^{1/2}, \end{aligned} \qquad (4)$$

a tiempo que en el momento inicial $t = 0$

$$y = 0,\ z = h,\ v_y = v_0 \cos \alpha_0,\ v_z = -v_0\,\text{sen}\,\alpha_0,$$

donde el origen del sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, esta ubicado en la superficie terrestre debajo del punto de ingreso del objeto a la atmosfera, el eje z esta dirigido hacia arriba y el eje y a la derecha.

Utilizando (3) y considerando que $v = v(z)$, con A_{12}^{d} como magnitud constante, se puede obtener una primera aproximacion de v como funcion de z:

$$v_1(z) = v_0\,[1 + 2g(h - z)/v_0^2 - (S\rho_0 H/m)(e^{-z/H} - e^{-h/H})]^{1/2}.$$

El analisis cualitativo realizado permite, para el problema examinado, hacer la siguiente conclusion: "el objeto debio chocar con la superficie terrestre a la distancia $l \cong 40$ a 60 km del epicentro, esto es, del lugar sobre el cual ocurrio la explosion a una altura aproximada de 10 km".

Se sabe que la busqueda de sustancia meteorica, exceptuando intentos episodicos aislados, se produjo solo en el epicentro de la explosion o en sus alrededores. No obstante, es necesario buscar la sustancia cosmica a lo largo de la proyeccion de la trayectoria de vuelo en la superficie, justo a una distancia de 40 a 60 km del lugar de las busquedas frecuentes.

La valoracion obtenida de la velocidad de vuelo del objeto, permite hacer una conclusion importante adicional en relacion con la hipotesis de cometa. A velocidades hipersonicas de vuelo de un objeto, la presion ejercida sobre su superficie se valora en los limites del modelo de Newton. La esencia del modelo se reduce a que las particulas de aire que vuelan hacia el objeto (en el sistema de exclusion del mismo) chocan directamente con el propio objeto. En un choque no elastico, semejante flujo ejerce una presion dinamica sobre la superficie del cuerpo $P_{din} = \rho v^2 \cos^2 \Theta$, donde Θ es el angulo entre la normal al elemento de superficie y v el vector velocidad. En cualquier parte, $P_{din}^{fren} \cong \rho v^2$. Aplicando esto ultimo a nuestro examen $P_{din}^{fren} = P_0 \exp(-z/H)$, donde $P_0 = \rho_0 v^2$, a tiempo que $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m^3 y $v = 4 \times 10^4$ m/seg, esto es, $P_0 = 2 \times 10^4$ atm.

Tabla 1

z	81	72	63	54	45	36	27	18	9
P_{din}^{fren} (atm)	2,4	6,7	18,3	50	133	360	10^3	$2{,}7\text{x}10^3$	$7{,}3\text{x}10^3$
P_{din}^{fren} (kgf / mm^2)	0,024	0,067	0,183	0,5	1,33	3,6	10	27	73

Al pasar el objeto por las capas de la atmosfera surgen altibajos de presiones entre sus regiones central y periferica. Asi, en el caso examinado, la presion cerca del eje central dirigida a lo largo de la velocidad $\boldsymbol{v}$, alcanza valores proximos a P_{din}^{fren} y en las regiones perifericas, alejadas al maximo del eje, la presion desciende hasta cero.

Con el fin de entender mejor la esencia del problema surgido, centremos nuestra atencion en los limites de resistencia del hielo de agua (cuando $t = 0$°C), tanto en la compresion, como en la descompresion, los cuales se caracterizan por magnitudes proximas a 0,1 kgf/mm^2. Semejante presion se alcanza ya a una altura de 70 a 65 km sobre la superficie terrestre. Es imposible entender como un objeto compuesto de hielo, pudo desplazarse sin destruirse hasta una altura de 10 km donde sucedio la explosion. Esta circunstancia hace la hipotesis de cometa poco probable, a menos que se realice una modernizacion de principio. Una nueva hipotesis afirma que debido al choque elastico del objeto con la superficie terrestre mediante un angulo con el horizonte de 15°, el objeto reboto, siguio su curso de vuelo y, por consiguiente, tendria que localizarse en las profundidades del Oceano Glacial Artico.

El conocimiento acerca del valor de la velocidad permite tambien responder a las preguntas acerca de la temperatura de la superficie del objeto, la intensidad de onda de choque balistico y su influencia en la superficie terrestre, el grado de ionizacion debida a la onda de choque frontal, algunos efectos electromagneticos que acompanaron al vuelo del objeto y toda una serie de otras interrogantes. Pero las respuestas a estas ultimas no se pueden obtener antes de la correspondiente formulacion en modelos matematicos. Sin embargo, nuestro objetivo es otro: "en un ejemplo concreto dilucidar algunas de las etapas de la modelacion matematica y demostrar el contenido heuristico de los modelos matematicos".

5. Etapas de la modelacion matematica.

El examen realizado nos conduce a la formulacion de las siguientes conclusiones como partes integrantes de las etapas de la modelacion matematica:

1. Es necesario comenzar la construccion del modelo con un conocimiento y analisis exhaustivos de los datos experimentales.
2. Las valoraciones cuantitativas y el analisis cualitativo permiten obtener una representacion clara, pero necesaria, acerca del objeto estudiado y de los ordenes de sus magnitudes.
3. El siguiente paso de modelacion tiene que ver con la formulacion del modelo matematico.
4. El analisis cualitativo proporciona determinadas predicciones o pronosticos utiles en las investigaciones subsiguientes.

Se puede concluir ademas que el propio modelo matematico se determina no tanto por el fenomeno investigado, como por las preguntas a las cuales el modelo debera responder. Por eso, el exito de una investigacion cientifica, frecuentemente se determina por la correcta formulacion de las interrogantes alrededor de la misma.

6. Modelacion en un problema concreto resuelto por los estudiantes del curso ordinario de analisis numerico, escuela de Ingenieria de Sistemas de UNINCCA.

La modelacion matematica se utiliza en la resolucion de una gama muy amplia de problemas. El objetivo consiste en aplicar las etapas de la modelacion matematica, anteriormente descritas, al siguiente problema. Este problema fue formulado a los estudiantes de analisis numerico de la escuela de ingenieria de sistemas de UNINCCA.

Los siguientes representan los datos de la poblacion de Antioquia, obtenidos en diferentes censos realizados a lo largo del siglo XX.

Tabla 2.

Ano	1951	1964	1973	1985	1993
Poblacion	1570197	2477299	3176695	4260350	4919619

Se requiere analizar y procesar esta informacion utilizando el metodo de los minimos cuadrados, esto es, identificar las variables dependientes e independiente, formar la matriz de las sumas de cuadrados y productos (matriz SCP), aplicar el algoritmo de descomposicion completa de Cholesky a esta matriz, determinar los coeficientes del modelo regresional y escribir la ecuacion de dicho modelo. Utilizando el modelo regresional encontrado, determinar los censos de poblacion de

Antioquia en los anos de 1951, 1964, 1973, 1985, 1993 y compararlos con los censos reales, encontrando en cada caso el error relativo (construya una tabla). ?Que interpretacion tiene el error relativo? ?Cuales aproximaciones, utilizando el modelo regresional, son mejores y por que? Haga una prediccion de la poblacion de Antioquia para los anos 2050 y 2100 utilizando el modelo regresional.

Usando un modelo de crecimiento exponencial determinar de la manera mas precisa posible una prediccion sobre el tamano de la poblacion de Antioquia en los anos 2050 y 2100. En el proceso de obtencion de la solucion exacta del modelo exponencial, encuentre los valores de las constantes involucradas utilizando los datos de la poblacion para los anos 1985 y 1993. ?Que tanto difiere la prediccion del modelo exponencial de la prediccion obtenida al extrapolar linealmente las poblaciones de 1990 y 2000? ?Hasta que punto las soluciones del modelo exponencial estan de acuerdo con los datos historicos? Al comparar las soluciones del modelo exponencial con los datos historicos, construya una tabla y encuentre en cada caso el error relativo. Determine cual aproximacion, utilizando el modelo exponencial, es mejor y por que.

Encontrar un modelo logistico de crecimiento de la poblacion de Antioquia. Obtenga la solucion exacta del modelo logistico y encuentre los valores de las constantes involucradas utilizando los datos de la poblacion para los anos 1973, 1985 y 1997. Use la formula de interpolacion de Lagrange de grado dos para extrapolar la poblacion de 1997. Utilizando la solucion exacta, encuentre una prediccion de la poblacion en los anos 2000, 2050 y 2100. Usando el metodo de Runge-Kutta de cuarto orden, resuelva el problema de valor inicial para el modelo logistico haciendo P(2000) = w_0, h = 10 anos y N = 10 (realice un programa de ordenador). ?Hasta que punto las predicciones en los anos 2050 y 2100, utilizando la solucion exacta, estan de acuerdo con aquellas obtenidas al utilizar el metodo de Runge-Kutta de cuarto orden?

Formule conclusiones claras sobre la confianza que puedan tener sus predicciones acerca del tamano futuro de la poblacion de Antioquia. Discutir cual de los tres modelos (regresional, exponencial o logistico) es mejor para los datos obtenidos de poblacion. Si ninguno de los tres es satisfactorio sugerir alternativas.

Se deben incluir graficos de los datos y de las soluciones de los modelos. ?Que interpretacion tienen los graficos?

Despues de modelar el problema y de realizar un analisis exhaustivo y comparativo de los resultados, nuestros estudiantes llegaron a las siguientes conclusiones:

1. Las predicciones de poblacion para los anos 2050 y 2100 utilizando los modelos exponencial, logistico y regresional, son respectivamente:

Ano 2050: 13.713.414, 7.000.270, 9.472.763.
Ano 2100: 33.704.218, 7.162.540, 13.503.967.

2. Los modelos exponencial y logistico proporcionan una prediccion adecuada en un tiempo a corto plazo. Las predicciones para los anos 2050 y 2100, utilizando el modelo exponencial, determinan una poblacion muy alta; utilizando el modelo logistico, la poblacion es muy baja; mientras que al parecer, la prediccion utilizando el modelo regresional es mas equilibrada.

7. Conclusiones.

La matematizacion de las ciencias y la modelacion matematica se han convertido en una actividad creativa que llevan a cabo no solamente los especialistas mas prominentes y las cabezas mas dotadas, sino todos nosotros docentes, especialistas en su area, encargados de la formacion de los futuros cuadros profesionales de nuestra patria: ingenieros, economistas, administradores, etc. La ensenanza de las matematicas y las ciencias naturales no debe limitarse al aprendizaje de memoria de un recetario de formulas en ausencia de contexto alguno. Se deben implementar herramientas donde los estudiantes tengan la posibilidad de realizar experimentos, formular hipotesis, crear modelos, concebir programas de computador sencillos para aplicar los conocimientos, confrontar resultados, emitir juicios y formular conclusiones. Un entrenamiento adecuado en este sentido y acorde con las necesidades del futuro especialista, le permitira resolver problemas complejos y le facilitara el proceso de toma de decisiones para un adecuado desenvolvimiento profesional. La ensenanza de las ciencias basicas, desde este punto de vista, reviste excepcional importancia en la formacion profesional de las futuras generaciones de ingenieros y economistas egresados de nuestra alma mater.

REFERENCIAS

Las Matematicas Hoy, Ejemplar No. 5, Editorial Escuela Superior, Kiev, 1989. (En Ruso).